Représentation des fonctions lipschitziennes

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement s'il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve : Le sens récriproque est immédiat, montrons le sens direct. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et on considère la dérivée distributionnelle T de f : $\begin{array}{cccl} T & : & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & & \phi & \mapsto & \langle f', \phi\rangle = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$

Étape 1 : On prolonge T sur L^1

Montrons que T est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), ||.||_1)$, pour cela, montrons que pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T, \phi\rangle = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}\,\mathrm{d}x$$

Soit $M > 0$ tel que $|x| > M \implies \phi(x) = 0$. On a :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)\dfrac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)\phi'(x)$

(ii) Par inégalité des accroissements finis,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall |h| < 1, \left| f(x)\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \right| \leq |f(x)|||\phi'||_\infty \mathbb{1}_{[-M-1,M+1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

D'où le résultat par théorème de convergence dominée. On a alors par linéarité et changement de variable,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit L une constante de Lipschitz de f, on a alors

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), |\langle T, \phi \rangle| \leq L||\phi||_1$$

Par théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense, T admet un unique prolongement toujours noté T en une forme linéaire continue sur $(L^1(\mathbb{R}), ||.||_1)$ i.e. un élément de $L^1(\mathbb{R})'$ avec $||T||_1 \leq L$.

Étape 2 : On construit g grâce au théorème de Riesz

Soit $n \geq 1$, on dispose des injections suivantes :

$$L^2(-n,n) \hookrightarrow L^1(-n,n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$$

La première injection est continue par théorème de Cauchy-Schwarz et le second prolongement s'effectue en posant $\phi = 0$ sur $[-n,n]^C$. Notons $\tilde{\phi}$ un tel prolongement.

Posons $\begin{array}{rccl} T_n & : & L^2(-n,n) & \to & \mathbb{R} \\ & & \phi & \mapsto & \langle T, \tilde{\phi} \rangle = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$.

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $g_n \in L^2(-n,n)$ telle que

$$\forall \phi \in L^2(-n,n), \langle T, \tilde{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\phi(x)$$

Si $k \geq n$, par unicité du théorème de Riesz, on a $g_k = g_n$ presque partout sur $[-n,n]$. Posons alors $g = \liminf g_n$ mesurable, on a $\forall n \in \mathbb{N}, g_{|[-n,n]} = g_n$.
Montrons que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$,
Par l'absurde, si $A = \{x \in \mathbb{R}, |g(x)| > L\}$ n'est pas négligeable, comme $A = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap [-n,n])$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(A_N) > 0$.
En posant $u = \text{signe}(g) \in \{-1, 1\}$ afin d'avoir $|g| = ug$. Posons $\phi = u\mathbb{1}_{A_N} \in L^2(-n,n)$ et

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-N}^{N} g(x)u(x)\mathbb{1}_{A_N}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A_N} |g(x)|\,\mathrm{d}x > L\lambda(A_N) = L||\phi||_1$$

ce qui contredit $||T||_1 \leq L$. D'où $T = f' = g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Étape 3 : Conclusion

Soit $\begin{array}{rccl} G & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ qui est continue par théorème de convergence dominée.
On a d'après le théorème de Fubini, $G' = g$ au sens des distributions $(*)$.
D'où $\langle G', \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = \langle T, \phi \rangle$ donc $G' = f'$.
Donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, tel que $f - G = c$ au sens des distributions $(**)$. L'injection $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ assure que pour presque tout x, $f(x) - G(x) = c$. Comme de plus, les applications sont continues, le résultat est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où

$$f(y) - f(x) = G(y) - G(x) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$$

$\square$

Annexe

Lemme 1 (*)**.** *Soit* $\begin{array}{rccc} G & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ *, on a* $G' = g$ *au sens des distributions .*

Preuve : Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle G', \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} G(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{O}\int_x^0 \phi'(x)g(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\int_0^x \phi'(x)g(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

Soit M tel que $\phi(x) = 0$ si $|x| > M$.
Pour presque tout (t, x) on a $|g(t)\phi'(x)|\mathbb{1}_{x\leq t\leq 0} \leq ||g||_\infty||\phi'||_\infty\mathbb{1}_{-M\leq x\leq t\leq 0} \in L^1(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$. Donc par théorème de Fubini-Lebesgue

$$\begin{aligned}\langle G', \phi \rangle &= \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^t g(t)\phi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} g(t)\phi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

Lemme 2 (**)**.** *Soit* T *une distribution telle que* $T' = 0$*, alors* T *est constant.*

Preuve : Les élemens de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle sont exactement les dérivées des fonctions tests :
En effet, si ψ est la dérivée d'une fonction test ϕ alors $\displaystyle\int \psi = 0$ car $\mathrm{Supp}(\phi)$ borné.
Réciproquement, soit ψ d'intégrale nulle, alors $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t)\,\mathrm{d}t$, φ est de classe C^∞ (car $\mathrm{Supp}(\psi)$ est bornée car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x$) et convient.
Notons E l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle,
Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$.
Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on écrit

$$\varphi = \psi + \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}x\right)\theta \qquad \text{avec } \psi \in E$$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\langle T, \theta \rangle = -\langle T', \int \psi \rangle + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\langle T, \theta \rangle$$

Donc en posant $C = \langle T, \theta \rangle$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = C\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle C, \varphi \rangle$$

Donc $T = C$ au sens des distributions. □